Скалярное произведение

Пусть V – векторное пространство со скалярным произведением $\cdot$.

1. Неравенство треугольника. Докажите неравенство $|\vec{v}_1| + |\vec{v}_2| \geqslant |\vec{v}_1 + \vec{v}_2|$ для любых векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$.

2. Неравенство К–Б–Ш. Докажите неравенство $|\vec{v}_1|^2 \cdot |\vec{v}_2|^2 \geqslant (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)^2$ для любых векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$.

3. Дано множество $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k\} \in V$ -ненулевых векторов, $n = \dim V$. Докажите следующие утверждения:

(a) Если $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ попарно ортогональны, то они линейно независимы.

(b) Множество векторов, ортогональных каждому из $\vec{u}_i$, $i = \overline{1, k}$, образует подпространство размерности $n - \dim\langle U\rangle$.

(c) Любой набор попарно ортогональных векторов можно дополнить до ортогонального базиса.

(d) Если векторы $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ попарно образуют тупые углы (т. е. их скалярное произведение отрицательно), то любые $k-1$ из них линейно независимы.

(e) Если попарные скалярные произведения векторов $\vec{u}_i$, $i = \overline{1, k}$, неположительны, то $k \leqslant 2n$. Что, если $k = 2n$?

4. В множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ выбрали различные подмножества $S_1, S_2, \ldots, S_m$, каждое из которых содержит нечётное количество элементов, а пересечение любых двух из них содержит чётное количество элементов. Докажите, что $m \leqslant n$.

5. Известно, что в тетраэдре две пары скрещивающихся ребер перепндикулярны. Докажите, что и третья пара скрещивающихся ребер обладает этим свойством.

6. Белоснежка и семь гномов живут в своём домике в лесу. В течение каждого из 16 последовательных дней некоторые гномы работали на алмазной шахте, в то время как остальные собирали грибы. Каждый гном выполнял только один вид работы в течение одного дня. Известно, что какие бы два дня ни выбрать, найдутся хотя бы три гнома, которые в эти два дня выполняли оба вида работы. Кроме того, в первый день все семь гномов работали на шахте. Докажите, что в один из этих 16 дней все гномы ходили за грибами.

7. Докажите, что все рёбра полного графа на n вершинах невозможно разбить на менее чем $n-1$ набор рёбер полных двудольных графов.

8. Точка O лежит внутри выпуклого многогранника, имеющего n вершин $A_1A_2A_3\ldots A_n$. Докажите, что среди всевозможных углов A_iOA_j, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, найдутся по крайней мере $n-1$ не острых (прямых, тупых или развёрнутых) углов.

9. Точечный прожектор испускает в пространство несколько лучей. Рассмотрим все острые углы, образованные лучами, испускаемыми прожектором. Известно, что, какой бы исходящий луч ни убрать, число острых углов между оставшимися лучами уменьшится ровно на 2. Какое максимальное число лучей может испускать такой прожектор?